



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală**  
**15 februarie 2015**

**Clasa a XI-a**

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se calculeze  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
b) Dacă  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu  $a \geq b$ , să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ , unde  $A_n, B_n$  reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei  $A^n$ .

2. Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , definit prin:  $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$ .

a) Arătați că  $a_n < 1, \forall n \geq 1$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$ .

c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot a_n$ .

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , astfel încât  $\text{Tr}(A) = 1$  și  $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$ .  
Demonstrați că:  $\det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}$ .

4. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  strict descrescător în care

$$x_1 > 0 \text{ și } x_n^4 + 4x_n \geq x_n^2 + x_n^3 \cdot x_{n+1} + 4, \forall n \geq 1.$$

Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și aflați limita sa.

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu)*

*Timp de lucru: 3 ore*

## Soluții clasa a XI-a:

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

a) Să se calculeze  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Dacă  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu  $a \geq b$ , să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ , unde  $A_n, B_n$  reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei  $A^n$ .

Soluție:

1. a) Se demonstrează prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & c^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}$ , unde

$$a_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}, \quad b_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b)  $A_n = 2a_n + c^n = (a+b)^n + (a-b)^n + c^n$  și

$$B_n = 2b_n + c^n = (a+b)^n - (a-b)^n + c^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece  $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$  și cum  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi concluzionăm:

$$1. \quad a, b, c > 0,$$

$$2. \quad a + b > c.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n + c^n}{(a+b)^n - (a-b)^n + c^n} = 1, \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{c}{a+b} \right)^n = 0.$$

2. Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , definit prin:  $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$ .

a) Arătați că  $a_n < 1, \forall n \geq 1$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$ .

Soluție:

2. a) Deoarece  $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$ , prin adunarea acestor inegalități se obține că:

$$a_n < \frac{n}{n^2+1}. \text{ Cum } \frac{n}{n^2+1} < 1, \forall n \geq 1, \text{ rezultă că } a_n < 1, \forall n \geq 1.$$

b) Avem inegalitățile:

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1};$$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1};$$

.....

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1};$$

După adunarea acestora obținem:

$$\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} < n \cdot a_n < \frac{n^2}{n^2+n}.$$

$$\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 1.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1 + na_n - 1)^{\frac{1}{na_n-1}} \right]^{n(na_n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(na_n-1)}.$$

$$\text{Dar } n \cdot (na_n - 1) = n^2 a_n - n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{n^2}{n^2+k} - 1 \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \text{ și se obține:}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$ , de unde obținem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}.$$

**3.** Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , astfel încât  $\text{Tr}(A) = 1$  și  $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$ .

Demonstrați că:  $\det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}$ .

Soluție:

**3.** Fie  $P = X^2 - X + d$ ,  $d = \det A$  și  $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

( $\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ). Atunci:

$$\begin{aligned} \det(A^2 + A + I_2) &= \det[(A - \varepsilon I_2)(A - \bar{\varepsilon} I_2)] = |\det(A - \varepsilon I_2)|^2 = \\ &= |P(\varepsilon)|^2 = |\varepsilon^2 - \varepsilon + d|^2 = |-2\varepsilon - 1 + d|^2 = |d + i\sqrt{3}|^2 = d^2 + 3. \end{aligned}$$

Ținând cont că  $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3}d$ , din relația de mai sus obținem că  $d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$ , de unde rezultă că:  $\det A = \sqrt{3}$ .

Cum  $\text{Tr}(A) = 1$ , folosind teorema *Cayley-Hamilton*, obținem:

$$A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2 = A \Rightarrow \det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}.$$

**4.** Relația din enunț este echivalentă cu:  $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright x_n^2 - 4x_n + 4, \forall n \geq 1$ .

Sau,  $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright \blacktriangleleft_n - 2 \blacktriangleright, \forall n \geq 1$ . De aici rezultă că  $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright \geq 0, \forall n \geq 1$ .

Deoarece șirul  $\blacktriangleleft_n \blacktriangleright_{n \geq 1}$  este strict descrescător, deci  $x_n - x_{n+1} > 0, \forall n \geq 1$ , rezultă că

$x_n^3 \geq 0, \forall n \geq 1$ . Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ; trecem la limită în relația de recurență și obținem:

$$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow \blacktriangleleft - 2 \blacktriangleright \leq 0 \Rightarrow l = 2.$$

## Barem de corectare

### Clasa a XI-a

Problema 1	Oficiu	1 p
a) Inducție matematică		3p
b) $A_n = 2a_n + c^n = (a+b)^n + (a-b)^n + c^n$		1p
$B_n = 2b_n + c^n = (a+b)^n - (a-b)^n + c^n$		1p
Deoarece $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$ și cum $a, b, c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi:		1p
1. $a, b, c > 0$ ,		
2. $a + b > c$		
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{c}{a+b} \right)^n = 0$		1p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n + c^n}{(a+b)^n - (a-b)^n + c^n} = 1$		2p
<b>TOTAL</b>		<b>10p</b>

Problema 2	Oficiu	1 p
a) $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$		1p

$a_n < \frac{n}{n^2 + 1}$	1p
Finalizare: $a_n < 1, \forall n \geq 1$ .	1p
b) $\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n}$	1p
Finalizare: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 1$ .	1p
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(na_n - 1)}$	1p
$n \cdot (na_n - 1) = -\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$	1p
$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 1}$	1p
Finalizare: $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}$	1p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>

<b>Problema 3</b>	<b>Oficiu 1 p</b>
$P = X^2 - X + d, d = \det A$ și $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1p
$\det(A^2 + A + I_2) = d^2 + 3$ .	5p
$d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$	1p
Finalizare	2 p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>

<b>Problema 4</b>	<b>Oficiu 1 p</b>
$x_n^3 - x_{n+1} \geq x_n - 2, \forall n \geq 1$	2p
$x_n^3 - x_{n+1} \geq 0, \forall n \geq 1$ .	1p
$(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător	1p
$x_n^3 \geq 0, \forall n \geq 1$	1p
Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ; trecem la limită în relația de recurență	1p
$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow (-2) \leq 0$	2p

Finalizare : $l = 2$	1p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>